Διάλεξη 16η
03/12/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η Μέθοδος των αγνώστων σταθερών: $L(y)=b$ Γ.Γ.

, όπου α) $b(x)=P(x)$: πολ/μο m βαθμού : $y_\mu^{(k)}$ πολ/μο m-βαθμού

Άσκηση 3: σελ 113.: $y''-5y'+6y=x^2+3$

$$y_\mu(x)=ax^2+\beta x+\gamma.$$

Λύση

$$2a-5(2ax+\beta)+6(ax^2+\beta x+\gamma)=x^2+3$$

$$6ax^2+x(6\beta-10a)+2a-5\beta+6\gamma=x^2+3.$$

Έτσι προκύπτει ότι : $6a=1$

$$6\beta-10a=0$$

$$2a-5\beta+6\gamma=3.$$

(E_0) : $y''-5y'+6y=0$

$\lambda^2-5\lambda+6=0 \rightarrow 2, 3$

$\{e^{2x}, e^{3x}\}$ Β.σ.λ.

Άσκηση 4 ii: $y'''+y'=x$ // $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=6$

$$y'_\mu=ax+\beta.$$

Λύση

$ax+\beta=x \Rightarrow \beta=0,\ a=1$

$y'_\mu=x \Rightarrow y_\mu(x)=\frac{x^2}{2}+c.$

$y'''+y'=0$

χαρ. πολ/μο : $\lambda^3+\lambda=0$

$\lambda(\lambda^2+1)=0$

$\lambda=0$ $\lambda=\pm i$

Β. σ.λ: $\{1, \cos x, \sin x\}$

$$y(x)=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x+\frac{x^2}{2}$$

και οι σταθερές θα προσδιοριστούν απ' τις αρχ. τιμές //

β) $b(x) = P(x)e^{\lambda x}$ $\xrightarrow{\text{μετασχημ.}}$ $y = ze^{\lambda x}$

Ασκ. 4iii: $y'' - 4y' + 4y + e^{2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$

$y = ze^{2x}$.

$\hookrightarrow z''e^{2x} + 2z'2e^{2x} + z\cdot 4\cdot e^{2x} - 4(z'e^{2x} + 2ze^{2x}) + 4ze^{2x} = e^{2x}$.

$$z'' + z'(4-4) + z(4-8+4) = 1 \Rightarrow$$

$$z'' = 1.$$

Παρασ. 3iii: $y''' + y'' + 2y = x^2e^{2x}$

$y = ze^{-2x}$.

$\hookrightarrow z'''e^{-2x} + 3z''(-2)e^{-2x} + 3z'\cdot 4e^{-2x} + z(-8)e^{-2x}$

$+ z''e^{-2x} + 2z'(-2)e^{-2x} + 4ze^{-2x} + 2ye^{-2x} = x^2e^{-2x}$.

$$z''' - 5z'' + 8z' - 2z = x^2$$

$$z_p(x) = ax^2 + \beta x + \gamma.$$

Οπότε μια μερική λύση θα είναι η: $y_p(x) = z_p(x)e^{-2x}$.

γ) $b(x) = P(x)e^{\sigma x}\cdot\cos\tau x$ ή $b(x) = P(x)e^{\sigma x}\cdot\sin\tau x$, τότε:

$L(y) = P(x)e^{(\sigma+i\tau)x}$

(*) Αν θέλω να λύσω για το συνημίτονο: $b(x) = P(x)e^{\sigma x}\cos\tau x$ με $\boxed{P(x)e^{\sigma x}\cos\tau x = Re[e^{(\sigma+i\tau)x}\cdot P(x)]}$, λύνω την $L(y) = P(x)e^{(\sigma+i\tau)x}$

Ενώ αν θέλω να λύσω για το ημίτονο τότε λύνω την ίδια διαδικασία υπολογίζεται αυτή την φορά το φανταστικό μέρος: $\boxed{P(x)\cdot e^{\sigma x}\sin\tau x = Im(e^{(\sigma+i\tau)x}P(x))}$

Παραδ 3(iv)-(v):

$y''-2y'+y = xe^{-x}\sin(2x) \quad | \quad y''-2y'+y = xe^{-x}\cos(2x)$

Για $y = ze^{(-1+2i)x}$: $y''-2y'+y = xe^{(-1+2i)x}$.

$$z''\cancel{e^{(-1+2i)x}} + 2z'(-1+2i)\cancel{e^{(-1+2i)x}} + z(-3-4i)\cancel{e^{(-1+2i)x}} -$$

$$-2\left[z'\cancel{e^{(-1+2i)x}} + z(-1+2i)\cancel{e^{(-1+2i)x}}\right] + z\cancel{e^{(-1+2i)x}} = x\cdot\cancel{e^{(-1+2i)x}}$$

$$\Rightarrow z'' + 4(-1+i)z' - 8iz = x$$

$$z_p(x) = ax + b$$

Τότε έχω: $0 + 4a(-1+i) - 8i(ax+b) = x$.

$$\underbrace{-4a + 4ai - 8aix - 8bi = x}$$

$-8ai = 1$ $\quad\|\quad$ $a = -\dfrac{1}{8i} = \dfrac{i^2}{8i} = \dfrac{i}{8}$

$-4a + 4ai - 8bi = 0$ $\quad\|$

$$\rightarrow -4\left(\frac{i}{8}\right) + 4\left(\frac{i}{8}\right)i - 8bi = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{i}{2} - \frac{1}{2} - 8bi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{i}{2} + 8bi = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 8bi = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} = -\frac{1+i}{2}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1+i}{2\cdot 8i}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1+i}{16i} = -\frac{i+i^2}{16(-1)} = \frac{i-1}{16}$$

Άρα $a = \dfrac{i}{8}$ και $b = \dfrac{i-1}{16}$

Οπότε $\boxed{z_p(x) = \dfrac{i}{8}x + \dfrac{i-1}{16}}$ η οποία είναι μιγαδική.

$$z_p(x) = \frac{1}{8} i x + \frac{1}{16}(-1+i)$$

$$\tilde{y}_p(x) = e^{(-1+2i)x}\left[\frac{1}{8} i x + \frac{1}{16}(-1+i)\right]$$

$$\tilde{y}_p(x) = e^{-x}\left[(\cos 2x + i \sin 2x)\right]\left[\frac{1}{8} i x - \frac{1}{16} + \frac{i}{16}\right].$$

Στο σημείο αυτό εάν θέλω να υπολογίσω την $L(y) = xe^{-x}\cos(2x)$ θα πάρω το πραγματικό μέρος δηλαδή: $y_p(x) = \mathrm{Re}\, \tilde{y}_p(x) = e^{-x}\left[-\frac{1}{16}\cos 2x - 1(\sin 2x \cdot \frac{1}{8} + \sin 2x \cdot \frac{1}{16})\right]$

Όμοιως αν θέλω να υπολογίσω το $L(y) = x \cdot e^{-x}\sin(2x)$ θα πάρω το φανταστικό μέρος; δηλαδή:

$y_p = \mathrm{Im}\, \tilde{y}_p(x)$

Άσκηση 3-26: Έστω $y'' + y = b(x)$, $x \geq 1$.

(i) $y_p(x) = \int_1^x \sin(x-t)\, b(t)\, dt$, μερική λύση (νδο)

(ii) Αν $\int_1^{\infty} |b(x)|\, dx < \infty$ τότε νδο όλες οι λύσεις είναι φραγμένες.

Λύση

(i) $y'_p(x) = \sin(x-x)\, b(x) + \int_1^x \cos(x-t)\, b(t)\, dt$

$y''_p(x) = \cos(x-x)\, b x + \int_1^x \sin(x-t)\, b(t)\, dt$

$y''_p(x) = b(x) - y_p(x).$

(ii) $y'' + y = 0 \;//\; \lambda^2 + 1 = 0$. 3.6.7: $\{\underbrace{\cos x}_{y_1}, \underbrace{\sin x}_{y_2}\}$

$|y(x)| = \left|c_1 \cos x + c_2 \cdot \sin x + \int_0^x \sin(x-t)\, b(t)\, dt\right| \leq$

$\leq |c_1| \cdot 1 + |c_2| \cdot 1 + \int_0^x |\sin(x-t)|\, |b(t)|\, dt$

$\leq |c_1| + |c_2| + \int_0^{\infty} |b(t)|\, dt < \infty.$

Άσκηση Β-47, άλυτες:

$$y'' + 2ay' + By = \phi \quad , \quad a>0, \quad B > a^2.$$

όπου ϕ συνεχής και φραγμένη.

i) Νδο όλες οι λύσεις είναι φραγμένες.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολ/μο $P(\lambda) = \lambda^2 + 2a\lambda + B$ έχει τις εξής λύσεις:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4B}}{2} = -a \pm i\sqrt{|a^2 - B|} = a \pm i\tau$$

Τότε ένα βασικό σύνολο λύσεων είναι το:

$$\{ e^{-ax}\cos\tau x , e^{-ax}\sin\tau x \}$$

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} e^{-ax}\cos\tau x & e^{-ax}\sin\tau x \\ -ae^{-ax}\cos\tau x - \tau e^{-ax}\sin\tau x & -e^{-ax}\sin\tau x + e^{-ax}\cos\tau x \end{vmatrix}$$

$$= e^{-2ax} \begin{vmatrix} \cos\tau x & \sin\tau x \\ -a\cos\tau x - \tau\sin\tau x & -a\sin\tau x + \tau\cos\tau x \end{vmatrix}$$

$$= e^{-2ax}[\ldots\ldots] = e^{-ax}\left[-a\cos\tau x\sin\tau x + \tau\cos^2 x + a\cos\tau x\sin\tau x + \tau\sin^2\tau x \right]$$

$$= \tau e^{-ax}.$$

$$\omega_1(x)=\begin{vmatrix}0 & e^{-ax}\sin\tau x\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-e^{-ax}\sin\tau x$$

$$\omega_2(x)=\begin{vmatrix}e^{-ax}\cos\tau x & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=e^{-ax}\cos\tau x$$

Συνολικά έχω ότι: $\omega(x)=\tau e^{-2ax}$

$\omega_1(x)=e^{-ax}\sin(\tau x)$

$\omega_2(x)=e^{-ax}\cos(\tau x)$

$$y_p(x)=e^{-ax}\cos\tau x\int_0^x \frac{e^{-as}\sin(\tau s)}{\tau e^{-2as}}\cdot\phi(s)\,ds+$$

$$e^{-ax}\sin\tau x\int_0^x \frac{e^{-as}\cos(\tau s)}{\tau e^{-2as}}\,\phi(s)\,ds.$$

$$|y(x)|\le \underbrace{|c_1||y_1(x)|+|c_2||y_2(x)|}_{\text{Είναι φραγμένες.}}+|y_p(x)|$$

άρα το μόνο που μένει είναι να δο $y_p(x)$ είναι φραγμένη.

$$|y_p(x)|\le e^{-ax}|\cos\tau x|\int_0^x \frac{e^{as}|\sin(\tau s)|}{|\tau|e^{-2as}}|\phi(s)|\,ds+e^{-ax}|\sin\tau x|$$

$$\cdot\int_0^x \frac{e^{-as}|\cos(\tau s)|}{|\tau|e^{-2as}}|\phi(s)|\,ds.$$

$$\le e^{-ax}\frac{1}{|\tau|}\int_0^x e^{as}|\phi(s)|\,ds+e^{-ax}\frac{1}{|\tau|}\int_0^x e^{as}\,ds$$

$$\le 2\frac{k}{|\tau|}e^{-ax}\left[\frac{e^{ax}-1}{a}\right]=2\frac{k}{\tau\cdot a}\left(1-e^{-ax}\right)\le\frac{2k}{\tau\cdot a},\ \forall x\in\mathbb{R}$$

άρα είναι φραγμένο //